

Теория вероятностей и математическая статистика

Тестирование статистических гипотез II.

Глеб Карпов

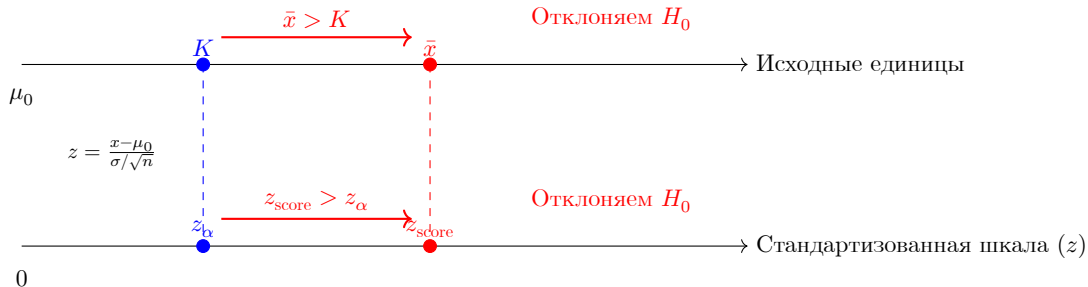
ВШБ Бизнес-информатика

Test-score: два эквивалентных подхода

- В предыдущей лекции мы сравнивали наблюдаемое значение (например, $\bar{x}$ или $\tilde{p}$) с границей принятия решения K в исходных единицах измерения.
- Альтернативный подход: преобразовать и наблюдаемое значение, и границу решения в стандартизованную шкалу.
- **Ключевая идея:** стандартизация — это монотонное преобразование, которое сохраняет отношения ”больше/меньше” между числами.
- Тип score зависит от распределения:
 - z_{score} — когда используем стандартное нормальное распределение (тестирование математических ожиданий при известной дисперсии или тест долей признаков)
 - t_{score} — когда используем t -распределение (неизвестная дисперсия)
- Если наблюдаемое значение $> K$ в исходных единицах, то score $>$ критическое значение в стандартизованной шкале.
- Если наблюдаемое значение $< K$ в исходных единицах, то score $<$ критическое значение в стандартизованной шкале.

Test-score: визуализация преобразования

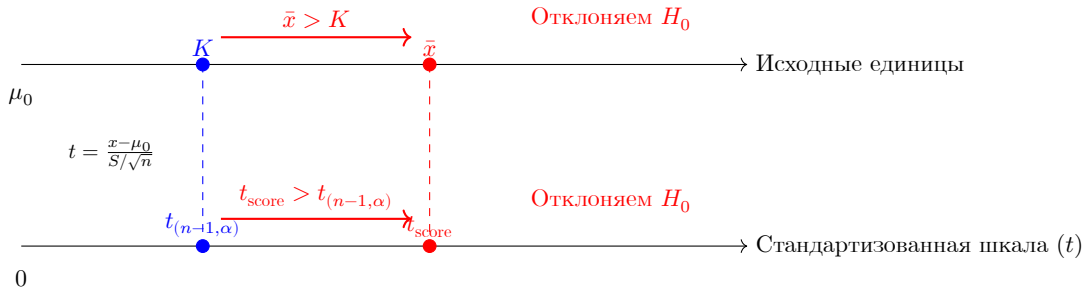
Пример: z -score для тестирования математического ожидания



Преобразование сохраняет отношение порядка. Решение одинаково в обеих шкалах.

Test-score: визуализация преобразования

Пример: t -score для тестирования математического ожидания



Преобразование сохраняет отношение порядка. Решение одинаково в обеих шкалах.

Test-score: преимущества подхода

- **Универсальность:** одна и та же критическая точка (z_α или $t_{df,\alpha}$) используется для всех тестов с соответствующим распределением.
- **Удобство:** не нужно вычислять границу решения K для каждого конкретного случая.
- **Эквивалентность:** оба подхода (сравнение в исходных единицах и сравнение score) дают одинаковый результат, так как стандартизация — монотонное преобразование.
- **Гибкость:** подход работает для разных типов тестов (односторонние, двусторонние) и разных распределений.

p-value: концепция

- **p-value** (p-значение) — это вероятность получить наблюдаемое значение статистики или более экстремальное значение *при условии, что нулевая гипотеза верна*.
- p-value показывает, насколько "необычны" полученные нами данные при предполагаемой верной нулевой гипотезе.
- **Правило решения через p-value:** Отклонить H_0 , если $p\text{-value} < \alpha$.
- Чем меньше p-value, тем сильнее свидетельство против нулевой гипотезы.
- p-value — это альтернативный способ принятия решения, эквивалентный сравнению score с критическим значением.

p-value: пример

Пример: Анализ длины шеи жирафа

Исследовательская команда изучает популяции жирафов. Исследователи верят, что средняя длина шеи жирафов огромная — около 20 метров. Однако в выборке было получено выборочное среднее 2.8 метров. Команда хочет проверить, действительно ли средняя длина шеи меньше того значения, в которое они верят.

- Случайная величина для анализа: X — длина шеи. Дисперсию X предположим известной и правдивой.
- Предполагается, что длины шеи следуют нормальному распределению.

Данные:

- Выборка: $n = 20$ жирафов
- Выборочное среднее: $\bar{x} = 2.8$ метров
- Известная дисперсия X : $\text{Var} [X] = 0.16$.

Гипотезы:

- $H_0 : \mu = 20$
- $H_1 : \mu < 20$

p-value: решение через score

- Гипотезы: $H_0 : \mu = 20$ против $H_1 : \mu < 20$ (левосторонний тест)
- Данные: $\mu_0 = 20$, $\sigma = 0.4$, $n = 20$, $\bar{x} = 2.8$, $\alpha = 0.05$
- z -score:

$$z_{\text{score}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{2.8 - 20}{0.4/\sqrt{20}} = \frac{-17.2}{0.0894} \approx -192.4$$

- Критическое значение: $z_{0.05} = 1.645$
- Решение через score: $z_{\text{score}} = -192.4 < -z_{0.05} = -1.645$, поэтому отклоняем H_0 .

p-value: вычисление и интерпретация

- **p-value** для левостороннего теста:

$$p\text{-value} = P_{H_0}(Z < z_{\text{score}}) = P(Z < -192.4) \approx 0$$

- p-value практически равна нулю, что означает крайне малую вероятность получить такое экстремальное значение при верной нулевой гипотезе.
- **Решение через p-value:** $p\text{-value} \approx 0 < \alpha = 0.05$, поэтому отклоняем H_0 .
- **Вывод:** Средняя длина шеи жирафов статистически значимо меньше 20 метров. Наблюдаемое значение 2.8 метра крайне противоречит гипотезе о том, что средняя длина равна 20 метрам.
- **Эквивалентность:** Оба подхода (сравнение z_{score} с z_{α} и сравнение p-value с α) дают одинаковый результат.